Nutná podmínka pro extrém ...

... hledáme body podezřelé z extrému.

Příklad: $f(x,y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 - 2 \leq x \leq -y^2 + 2\}$$

najděte extrémy funkce f na M (i lokální)

Vlastnosti M: M je uzavřená,

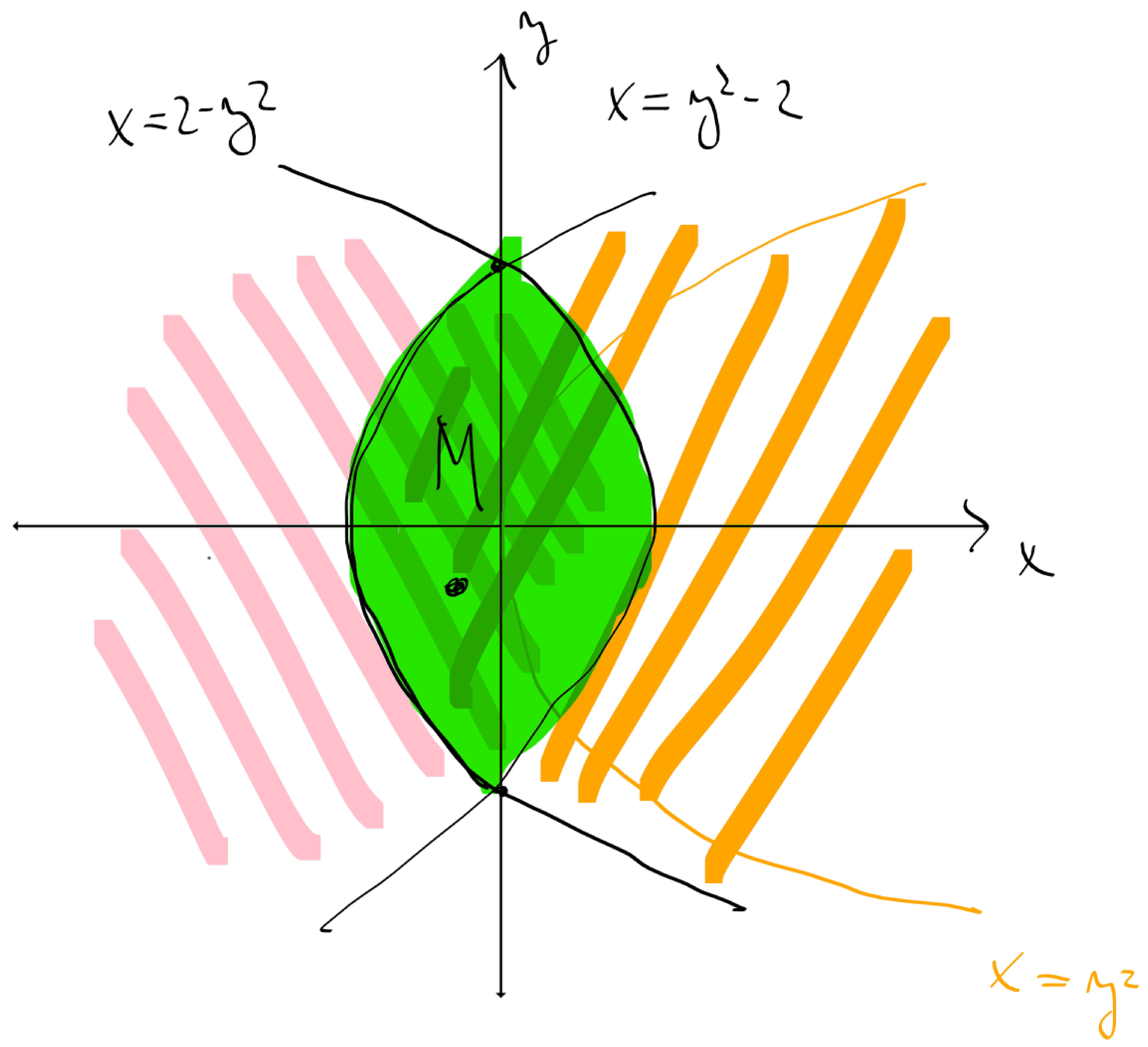
$$H(M) = \{(x,y) : y^2 - 2 = x, \; x \leq 0\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) : 2 - y^2 = x, \; x \geq 0\}$$

$$M^\circ = \{(x,y) : y^2 - 2 < x < 2 - y^2\}$$

Hledáme lokální extrém.

na $H(M)$ hledáme tzv. vázané extrémy



Body podezřelé z extr.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{3}{2}x + y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 + x + 4y = 0$$

$\frac{3}{2}x + y = -1 \qquad 6x + 4y = -4$

$x + 4y = -2 \quad \Rightarrow 5x = -2 \qquad x = -\frac{2}{5}$

$4y = -2 + \frac{2}{5} = \frac{-8}{5} \qquad y = -\frac{2}{5}$

PB: $\left[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right] \overset{\cancel{?}}{\in} M$ (resp. M°):

$M = \{(x,y) : y^2 - 2 \le x \le -y^2 + 2\}$

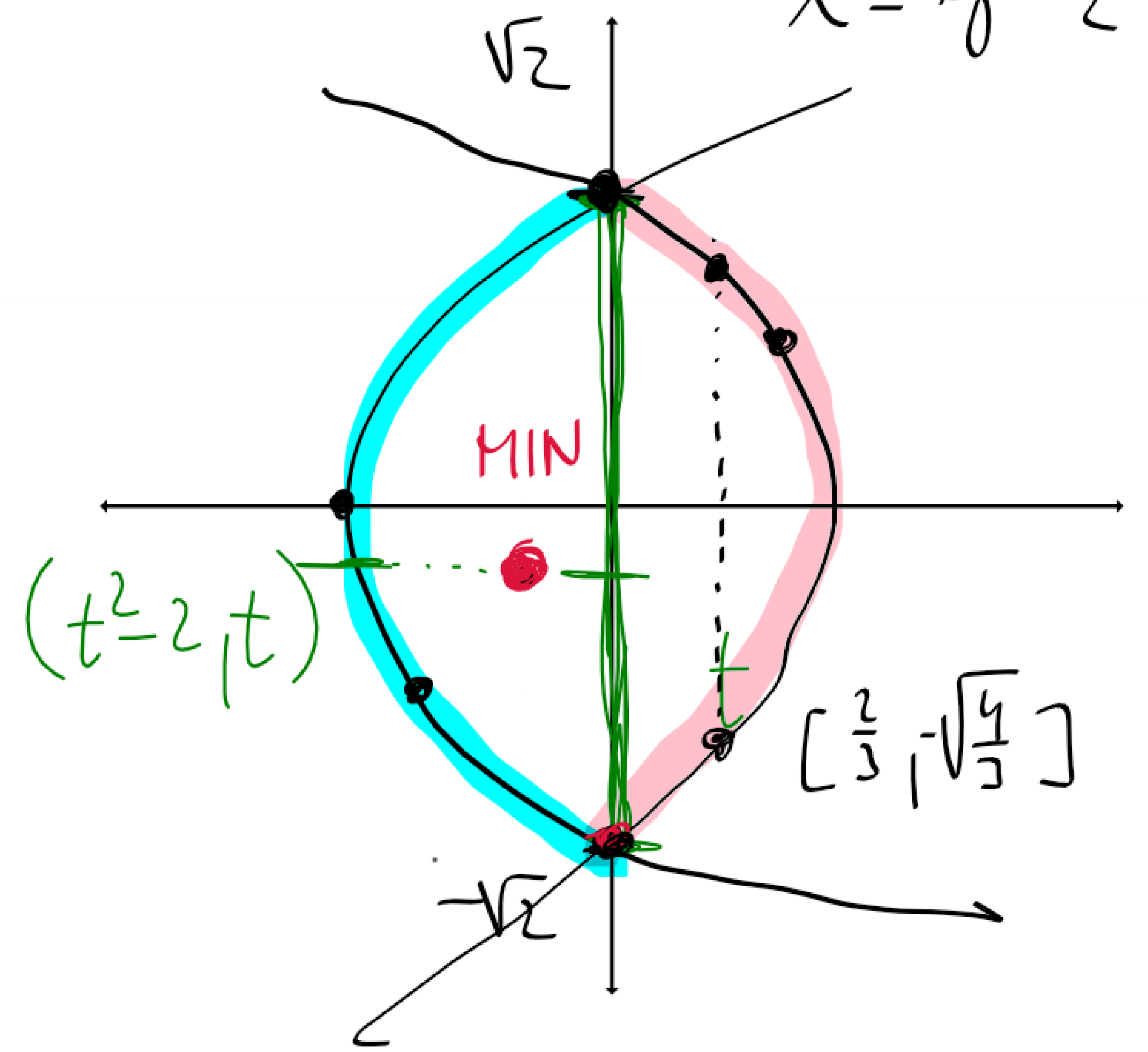
$\frac{4}{25} - 2 \overset{\checkmark}{\le} -\frac{2}{5} \overset{\checkmark}{\le} -\frac{4}{25} + 2.$

Extrémy přes $H(M) =$

$= \underbrace{\{x = y^2 - 2 \wedge x \le 0\}}_{M_1} \cup \underbrace{\{x = 2 - y^2 \wedge x \ge 0\}}_{M_2}$

Parametrizace M_1, M_2:

$\varphi_1(t) = (t^2 - 2, t), \quad t \in \cancel{\mathbb{R}} \; [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \ldots M_1$



$y^2 - 2 = 0$

$y = \pm\sqrt{2}$

Podobně M_2 parametrizujeme křivkou

$\varphi_2(y) = (2 - y^2, y), \quad y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$

Chceme maxima / minima funkcí

$f \circ \varphi_1, \quad f \circ \varphi_2.$

$$f\circ\varphi_1(t) = f(\varphi_1(t)) = f(t^2-2, t) =$$

$$\left[f(x,y) = x+2y+\frac{3}{4}x^2+xy+2y^2 \right]$$

$$= \cancel{t^2}-2+\cancel{2t}+\frac{3}{4}(t^2-2)^2+(\cancel{t^2}-\cancel{2})\cdot t+\cancel{2}t^2 =$$

$$= 3t^2-2+t^3+\frac{3}{4}(t^4-4t^2+4) =$$

$$= \frac{3}{4}t^4+t^3+1 =: g_1(t), \quad t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

$$g_1'(t) = 3t^3+3t^2 = 3\cdot t^2(t+1) = 0$$

$$\iff t=0 \ \vee\ t=-1.$$

P.B. $\varphi_1(0)$, $\varphi_1(-1)$, tj:

$$\varphi_1(0) = [-2,0], \quad \varphi_1(-1) = [-1,-1]$$

$\varphi_2(1)$, $\varphi_2(\pm\sqrt{\frac{4}{3}})$:

$$[1,1], \ [2-\tfrac{4}{3}, \sqrt{\tfrac{4}{3}}], \ [\tfrac{2}{3}, -\sqrt{\tfrac{4}{3}}]$$

$$f\circ\varphi_2(t) = f(\varphi_2(t)) = f(2-t^2, t) =$$

$$= 2-\cancel{t^2}+\cancel{2t}+\frac{3}{4}(2-t^2)^2+(\cancel{2}-t^2)t+\cancel{2t^2} =$$

$$= \cancel{t^2}+\cancel{4t}-\cancel{t^3}+2+\frac{3}{4}(4-\cancel{4t^2}+t^4) =$$

$$= -2t^2+4t-t^3+5+\frac{3}{4}t^4$$

$$= \frac{3}{4}t^4-t^3-2t^2+4t+5 = g_2(t)$$

$$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

$$g_2'(t) = 3t^3-3t^2-4t+4 =$$

$$= 3t^2(t-1)-4(t-1) =$$

$$= (t-1)(3t^2-4) = 0 \iff$$

$$\iff t=1 \ \vee\ 3t^2=4 \iff$$

$$\iff t=1 \ \vee\ t=\sqrt{\frac{4}{3}} \ \vee\ t=-\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Dále PB: $[0,\sqrt{2}]$, $[0,-\sqrt{2}]$

Zbývá dosadit všechny PB do f a porovnat výsledné hodnoty.

$$\max_M f = 4+2\sqrt{2}, \quad \min_M f = -\frac{3}{5}$$

<u>Pozn.:</u> $f(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}) =$

$$= -\frac{2}{5} - \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{8}{25} =$$

$$= -\frac{6}{5} + \frac{15}{25} = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Tedy minima se nabývá v bodě

$[-\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}] \in M^0$.

<u>TVRDÍM</u>

$\Longrightarrow [-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$ je bod <u>ostrého</u> lokálního min.

Je to bod glob. minima $\Rightarrow$ lokálního.

„<u>Ostrého lokálního</u>": Kdyby NE, museli by (lib. blízko bodu $[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$) existovat další body, v nichž má f hodnotu $-\frac{3}{5}$. Pak v takových bodech by také bylo lok. minimum, a tedy nulové PD.

Ale my víme, že jediný bod M^0 (dokonce celého $\mathbb{R}^2$), kde obě PD $=0$, je bod $[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$.

Tedy opravdu v $[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$ je ostrý lokální extrém.

Připomeň:

Pokud $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje:

- $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ f má v bodě $\underline{a}$ minimum
- $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ f má v bodě $\underline{a}$ maximum.

Analogická metoda funguje pro fce d-proměnných.

Kritérium 2. řádu pro lokální extrémy:

Uvažujme stac. bod $\underline{a} \in \mathbb{R}^d$ fce f (všechny 1. PD jsou $= 0$).

Jak poznat, jde-li o bod extrému?

Podívejme se na matici

$$d^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_d \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_d \partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_d} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_d} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_d^2} \end{pmatrix}$$

$$d^2f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1}^{d} \qquad \left[(a_{ij})_{i,j=1}^{d}\right]$$

$d^2f(a)$ PD $\Rightarrow$ minimum
$d^2f(a)$ ND $\Rightarrow$ max
} ostré

$d^2f(a)$ ID $\Rightarrow$ není extrém v bodě a.

Zpět k příkladu:

$$f(x,y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$$

$f_x(x,y) = 1 + \frac{3}{2}x + y$ $\qquad f_{xx} = \frac{3}{2}$

$f_y(x,y) = 2 + x + 4y$ $\qquad f_{yx} = 1$

$f_{xy} = 1$

$f_{yy} = 4$

Tedy $d^2f(a) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$ (pro libovolný bod $a \in \mathbb{R}^2$)

$\frac{3}{2} > 0$, > 0

$\frac{3}{2}\cdot 4 - 1\cdot 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow$ P.D.

Tedy celkem: v bodě $[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$ je lokální minimum

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim_{\frac{3}{2}\cdot(2)-(1)} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\frac{3}{2} > 0$, $5 > 0$ PD

Příklad: $f(x,y) = xy$ $\qquad f_x = y \quad f_y = x$

$d^2f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,$

$f_{xy} = f_{yx} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{S^+}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 2 > 0,\ -1 < 0 \qquad \text{ID}$$

$\Longrightarrow$ funkce nemá v daném bodě extrém.
v žádném bodě extrém.

(PODEZŘELÝ BYL BOD $[0,0]$.)

$$d^2 f(a) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad -2 < 0,\ -2 < 0 \ldots \quad \text{ND mce.}$$

Příklad:

$$f(x,y) = -(x^2 - 2x + y^2 + 6y - 3)$$
$$= -x^2 + 2x - y^2 - 6y + 3$$
$$= -((x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 - 3) =$$
$$= 13 - (x-1)^2 - (y+3)^2$$

VRCHOL $[1, -3, 13]$

$f_x = -2x + 2 \qquad f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = f_{yx} =$

$f_y = -2y - 6 \qquad f_{yy} = -2 \qquad = 0$

Hledejme SB (PB z extrému):

$$f_x = 0 \quad \wedge \quad f_y = 0$$
$$-2x + 2 = 0 \quad \wedge \quad -2y - 6 = 0$$
$$x = 1 \quad \wedge \quad y = -3$$

$[1, -3]$ je bod lokální extrém, a to (ostrý) max.